Representación lógica del tiempo social

Copyright	1998, ***Bayes*** Inference, S.A.
Título	Representación lógica del tiempo social
Asunto	Diseño de una representación del tiempo
Clave	
Archivo	
Creación	5/jul/1996
Impresión	
Distribución	Interna
Revisión	24/feb/2011

1. Tiempo en $\mathbb{Q}$

La aceptación de la recta real como modelo del tiempo es intuitiva. La medida del tiempo se basa en un ordenamiento numerable de instantes temporales. Aunque en general estos instantes temporales pueden considerarse puntos de la recta real, en la práctica, sin embargo, sólo necesitamos puntos del conjunto de los número racionales, $\mathbb{Q}$, para suministrar un modelo del tiempo, en el que incluir cualquier unidad de medida por fina que ésta sea.

1.1 Funciones intervaladoras y fechados

Sea un conjunto de funciones a las que denominamos **intervaladoras**. Estas funciones aplican los enteros en el conjunto de los números racionales y son estrictamente monótonas y no acotadas:

$$f_i: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q};\ f_i(k) < f_i(k+1), k \in \mathbb{Z}$$

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \qquad \exists\ k \in \mathbb{Z}, f_i(k) > x$$

A cada función intervaladora corresponde una función que aplica los enteros en una partición del tiempo en intervalos disjuntos semiabiertos.

Sea la función g_i tal que $g_i(k) = [f_i(k), f_i(k+1))$, de modo que $g_i(\mathbb{Z})$ es una partición del tiempo de la clase enunciada, es decir $g_i(\mathbb{Z}) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} g_i(k) = \mathbb{R}$ y para $k \neq l$, $g_i(k) \cap g_i(l) = \emptyset$. Sea $\mathcal{F}_i$ la partición del tiempo generada por g_i.

Sea $\wp$ la colección de todas las particiones del tiempo generadas por funciones intervaladoras. Todo subconjunto no acotado, ni superior ni inferiormente, de una partición $\mathcal{F}_i \in \wp$ es un **fechado**.

Cada elemento $g_i(k)$ de un fechado recibe el nombre de **fecha**.

Todo conjunto $\mathcal{F}_i$ perteneciente a la clase $\wp$ es un fechado y recibe el nombre de **fechado recubridor**.

Si $A \neq \mathcal{F}_i$ es no acotado ni superior ni inferiormente y $A \subset \mathcal{F}_i$, A es un fechado no recubridor de la familia generada por g_i

El conjunto de todos los fechados generados por g_i es el subconjunto de las partes de las partes de $\mathcal{F}_i$ compuesto por conjuntos no acotados ni superior ni inferiormente de fechas de $\mathcal{F}_i$.

Toda fecha $g_i(k)$ tiene definida la función sucesor n-ésimo en el fechado $\mathcal{F}_i$, $Succ(g_i(k), n) = g_i(k+n)$. Asimismo, toda fecha $g_i(k)$ tiene definida el predecesor n-ésimo en el fechado $\mathcal{F}_i$:

$$Pred(g_i(k), n) = Succ(g_i(k), -n)$$

Una colección de funciones $\{f_i\}$ tal que $f_1(\mathbb{Z}) \subset f_2(\mathbb{Z}) \subset \cdots f_n(\mathbb{Z})$ se denomina una colección de intervaladoras armónicas. Si $f_i(\mathbb{Z}) \subset f_j(\mathbb{Z})$ se dice que la intervalación j es más fina que la intervalación i.

Los fechados generados por funciones intervaladoras armónicas entre sí, se les denomina armónicos entre sí.

2. Calendarios

Un calendario es un sistema de medida del tiempo social constituido por una colección de funciones intervaladoras armónicas. Calendarios importantes por su actual uso son el gregoriano, el árabe-musulmán (en su versión saudí), el judío y el chino (cfr.:)

La colección de intervaladoras armónicas del calendario gregoriano producen los fechados recubridores siguientes: Anual, Mensual, Diario, Horario, Minutal y Secundal. El conjunto de fechados recubridores que describen un calendario es llamado conjunto de **fechados básicos** de dicho calendario. El conjunto de las intervalaciones que generan los fechados recubridores básicos se conoce como el conjunto de las intervalaciones básicas.

Naturalmente, podemos agregar cuantas intervalaciones más finas deseemos, décimas, centésimas, milésimas de segundo y así sucesivamente. Es claro que el sistema de numeración empleado en la medida del tiempo es peculiar ya que no existe una única base en términos de la cual se formen las unidades de orden superior e, incluso, estas unidades pueden ser irregulares como el caso de días y meses. También pueden agregarse al sistema intervalaciones menos finas como siglos o milenios. Intervalaciones más y menos finas que el conjunto enumerado arriba pueden precisarse en aplicaciones poco frecuentes y por tanto para los usos habituales no resulta conveniente recargar el lenguaje de representación del tiempo.

Aunque la representación del tiempo que se propone aquí permite el uso simultáneo de varios calendarios en lo que sigue nos atendremos al calendario gregoriano, asociado a cierto huso horario como GM, tanto por la importancia intrínseca de éste calendario como por el hecho de que ello nos permitirá establecer algunas de las principales propiedades de nuestro sistema de representación. Cada huso horario tiene un calendario gregoriano correspondiente.

3. Conjuntos temporales básicos

Un **conjunto temporal básico** es la unión de una subcolección de fechas de un fechado básico.

Sea una función g_i que particiona el tiempo en intervalos. Si construimos una partición de los enteros en subconjuntos, bien mediante una función módulo (que es el caso de la partición en días de la semana de la intervalación diaria), bien mediante algún otro procedimiento (la partición de los enteros en distintos días de mes desde el día 1 al 31), podemos expresar ciertos conjuntos temporales que llamaremos básicos en la forma:

$$\bigcup_{j \in J} g_i(j), \qquad J \subset \mathbb{Z}$$

Así para el fechado anual podemos definir el conjunto *Leap (leap year)* del tiempo contenido en todos los años bisiestos del calendario gregoriano.

Para el fechado mensual podemos definir los conjuntos $M(i); i \in \{1, \ldots, 12\}$, que incluyen el tiempo contenido, respectivamente, en los meses de Enero, Febrero, ..., Diciembre del calendario gregoriano.

De forma semejante para el fechado diario podemos definir los conjuntos $WD(i); i \in \{0, \ldots, 6\}$ y $D(i); i \in \{1, \ldots, 31\}$, *Easter,* y *GreekEaster*, donde la primera colección de conjuntos indica el tiempo incluido en los domingos, los lunes,..., los sábados respectivamente, la segunda colección hace lo propio para el tiempo contenido los días 1, 2,..., hasta 31, y los dos últimos conjuntos hacen referencia a la Pascua de resurrección occidental y a la misma fecha de la iglesia ortodoxa.

Homólogamente para los fechados horario, minutal y secundal podemos construir los conjuntos:

$$H(i) \quad i \in \{0, \ldots, 23\}; \quad Mi(i) \quad i \in \{0, \ldots, 59\}; \quad S(i) \quad i \in \{0, \ldots, 59\}$$

$$H(i)\ i \in \{0, \ldots, 23\}, Mi(i)\ i \in \{0, \ldots, 59\}, S(i)\ i \in \{0, \ldots, 59\}$$

3.1 Denotación de fechas de una intervalación básica

La implementación computacional de la estructura del tiempo requiere un mecanismo para denotar fechas particulares de las correspondientes intervalaciones básicas. Tal como han sido definidas, las fechas de un fechado son conjuntos temporales. Simultáneamente, en cada fechado el punto temporal mínimo de cada fecha puede ser utilizado como etiqueta de dicha fecha o, simplemente, como referencia en la recta real. En general cuando hablamos de puntos de forma explícita nos referiremos, necesariamente, al origen de dicha fecha. Usaremos, por tanto la notación siguiente para referirnos a puntos y a fechas, respectivamente.

Utilizaremos las siguientes convenciones:

y2011 identifica el inicio del año 2011 o dicho de forma más precisa el punto mínimo de la fecha correspondiente a dicho año en la intervalación anual del calendario gregoriano. Year(2011) identifica la fecha correspondiente.

y2011m6 identifica el punto mínimo de la fecha perteneciente a la intervalación mensual correspondiente con el mes de Junio de 2011. Month(2011,06) identifica la fecha correspondiente.

y2011m6d22 identifica el punto mínimo de la fecha perteneciente a la intervalación diaria correspondiente con el día 22 de Junio de 2011. Day(2011,06,22) identifica la fecha correspondiente.

y2011m6d22h12 identifica el mínimo de la fecha perteneciente a la intervalación horaria correspondiente con la hora 12 del día 22 de Junio de 2011. Hour(2011,06,22,12)

y2011m6d22h12mi11, y2011m6d22h12mi11s53 identifican, respectivamente los mínimos del minuto y el segundo correspondientes. Mi(2011,06,22,12,11) y Sec(2011,06,22,12,53) indican las fechas correspondientes.

3.2 Intervalos temporales

Consideremos el intervalo temporal $I_i^{k,k+l+1} = [f_i(k), f_i(k+l+1))$ cerrado por la izquierda y abierto por la derecha. Este intervalo temporal puede construirse como

$$I_i^{k,k+l+1} = \bigcup_{j=k}^{k+l} g_i\,(j)$$

y puede denotarse como $[g_i(k), g_i(k+l)]$.

Usando la notación para fechas construida en el punto precedente un intervalo concreto se denota como In(y2011m2,y2011m6d22).

No debe perderse de vista que pese a las notaciones utilizadas, de acuerdo con nuestra definición, todo intervalo temporal es un intervalo semiabierto, cerrado por la izquierda y abierto por la derecha.

3.3 Conjuntos Periódicos

Dada una cierta fecha de una intervalación básica podemos construir conjuntos temporales periódicos. Estos conjuntos temporales periódicos se construyen como:

$$P_i^{k,p} = \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} g_i(k+jp)$$

Donde p es un entero que describe el periodo y $g_i(k)$ es la fecha origen del conjunto periódico $P_i^{k,p}$. Obviamente el subíndice i determina la intervalación básica a la que este conjunto temporal se refiere.

A efectos computacionales construimos conjuntos periódicos mediante la expresión Periodic(fecha, p), donde p es un entero.

3.4 Operaciones entre conjuntos temporales

Los distintos conjuntos básicos ampliados con el conjunto universal, al que solemos denotar por C, pueden operarse mediante la unión finita, la intersección finita y la diferencia finita de conjuntos produciendo nuevos conjuntos derivados, definiendo así un álgebra de Boole.

Puede observarse que aunque los conjuntos temporales básicos se han construido como uniones de fechas pertenecientes a cierta intervalación básica es evidente que cualquier intervalación más fina que dicha intervalación puede generar asimismo el mencionado conjunto. Así aunque el conjunto *Leap* ha sido construido tomando como base la intervalación anual, cualquier otra intervalación armónica más fina podría generarlo. Particularmente el resto de intervalaciones básicas pueden generar idéntico conjunto.

Idéntica observación a la contenida en el párrafo precedente puede realizarse para cualquier conjunto temporal construido a partir de cualquier intervalación que no sea la más fina.

4. Intervalación propia y fechado propio de un conjunto temporal

4.1 Definición de intervalación propia

Puesto que todos los conjuntos temporales básicos se construyen como una unión de elementos de un fechado generado por una intervalación, es claro que **todo conjunto** del álgebra definida **es** de hecho **una unión de intervalos de idéntica intervalación**. Naturalmente un conjunto temporal que puede construirse como la unión de una subcolección de fechas de un fechado, puede expresarse también como la unión de una subcolección de fechas de un fechado más fino.

Diremos que $f_i(\mathbb{Z})$ es la intervalación propia del conjunto C_t con $\mathcal{F}_i$ como fechado propio si y sólo si

1. $\mathcal{F}_i$ es un fechado básico generado por dicha intervalación
2. $C_t = \bigcup_{h \in H} g_i(h)\,, H \subset \mathbb{Z}$
3. Si $C_t = \bigcup_{v \in V} g_j(v)\,, V \subset \mathbb{Z}, i \neq j$ entonces $f_i(H) \subset f_j(V)$

Si $f_i(\mathbb{Z})$ es la intervalación propia de un conjunto temporal diremos que $\mathcal{F}_i$ es su fechado propio. Puesto que existe una correspondencia biunívoca entre intervalación propia y fechado propio usaremos indistintamente ambas etiquetas.

Todo conjunto temporal puede escribirse sin recurrir a familias de intervalos procedentes de una intervalación más fina que su intervalación propia.

A efectos de ciertas evaluaciones podemos actuar como si la intervalación propia del conjunto temporal fuese la indicada la intervalación más fina presente (indirectamente) en su definición sintáctica. A esta intervalación la llamamos intervalación pseudo-propia de un conjunto temporal. Esto supondrá sobrecoste computacional sólo cuando la expresión que define el conjunto, involucre familias de conjuntos (de intervalación más fina) innecesarias, lo que es presumible que ocurrirá pocas veces.

4.2 Consecuencias del concepto de intervalación propia

4.2.1 Función característica de un conjunto

El concepto de intervalación propia tiene consecuencias fundamentales para nuestros propósitos. Hasta este momento hemos hablado de conjuntos temporales renunciando explícitamente a determinar cuáles son los elementos que constituyen estos conjuntos temporales. La respuesta a esa pregunta es que el contenido de un

Bayes Inference, S.A.
c/ Barco, Nº10, 1ºD, E-28004 MADRID
Tfn (91) 532.74.40, Fax (91) 532.26.36

conjunto temporal son puntos de tiempo, puntos de la recta real. ¿Pero cómo podemos operar conjuntos temporales de forma efectiva?

Las expresiones $A \cup B$, $A \cap B$, o $A - B$ donde A y B son conjuntos temporales producen conjuntos temporales que son conjuntos de puntos. Para dotar a dichas expresiones de sentido operacional necesitamos al menos dos ingredientes. En primer lugar cada conjunto temporal A debe tener definida su función característica χ_A de forma que $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ y $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$; en segundo lugar, dicha evaluación debe ser eficiente desde el punto de vista computacional. La intervalación propia de un conjunto temporal, o intervalaciones más finas que ésta, realiza ambas funciones de un modo simple.

En primer lugar notemos que el fechado propio de un conjunto temporal particiona este conjunto en una colección, posiblemente numerable, de fechas. Esta partición equivale a la clase de equivalencia construida a partir de la función característica χ_A. Si un elemento de una fecha del fechado propio pertenece al conjunto A, cualquier otro elemento de la misma fecha también pertenece a dicho conjunto. Específicamente, de acuerdo con nuestras definiciones $f_i(k) \in g_i(k)$ y es precisamente su elemento mínimo. Entonces, la evaluación de la función característica de los elementos de una fecha del fechado propio de un conjunto se reduce a la evaluación de su representante $f_i(k)$.

4.2.2 Fechado propio del conjunto resultado de una operación binaria

Consideremos cualquier operación binaria de conjuntos temporales. La intervalación propia de dicha operación es la más fina de las intervalaciones propias de cada uno de los conjuntos bajo el operador binario. La evaluación de una expresión en la que intervienen varios operadores implica la obtención del fechado propio de la expresión que es, justamente la intervalación propia más fina de los conjuntos intervinientes en la expresión.

Supongamos que precisamos evaluar si cierta fecha perteneciente a la intervalación propia forma parte del conjunto unión de A y B, $A \cup B$. Es decir deseamos obtener $\forall x \in g_i(k)$ el valor $\chi_{A\cup B}(x)$ que, obviamente, es 1 si $\chi_A(x) = 1$ o $\chi_B(x) = 1$. Para ello basta evaluar $\chi_{A\cup B}(f_i(k))$, donde $f_i(k)$ es el punto mínimo de la fecha $g_i(k)$ perteneciente al fechado propio de $A \cup B$.

4.2.3 El uso de la función sucesor para la obtención de nuevos conjuntos temporales

Las otras consecuencias de los conceptos de intervalación propia y fechado propio están relacionadas con la ordenación de las fechas de un fechado y la existencia del sucesor de toda fecha en su fechado. Este atributo no sólo ordena los cálculos de la función característica de un conjunto sino que permite extender el álgebra de conjuntos con operaciones sucesor aplicadas a conjuntos.

La función sucesor aplicada a conjuntos temporales no es sino una generalización de la operación sucesor en el fechado propio o en un fechado más fino que éste. Esta operación nos da un conjunto imagen compuesto por los sucesores de todas las fechas del conjunto origen.

4.3 El sucesor de un conjunto temporal en un fechado básico admisible

Como sabemos un conjunto temporal puede verse como una unión de fechas pertenecientes a su fechado propio o como unión de fechas de fechados más finos que el fechado propio.

Definimos el sucesor enésimo de un conjunto temporal en un fechado admisible (propio o más fino) como:

$$Succ(Ct, Fechado, n) = \bigcup_{g_i(k) \in Ct} Succ(g_i(k), n)$$

Desde el punto de vista computacional es conveniente tener funciones que responda a la necesidad frecuente de usar uniones finitas de sucesores de conjuntos en fechados admisibles. Estas uniones finitas de la función $Succ$ tienen la siguiente sintaxis:

$$Range(Ct, n, m) = \bigcup_{j=n}^{m} Succ(Ct, Fechado, j) = \bigcup_{j=n}^{m} \bigcup_{g_i(k) \in Ct} Succ(g_i(k), j)$$

Debe notarse que $Range(Ct, n, n) = Ct$ y que $\big((Ct \neq \emptyset \ y \ Range(Ct, n, m)) = \emptyset\big) \Leftrightarrow (n > m)$

4.4 Sucesor de un conjunto en otro

Consideremos ahora dos conjuntos temporales $A = \bigcup_{g_i(k) \subset A} g_i(k)$ y $B = \bigcup_{g_i(k) \subset B} g_i(k)$. Sea $g_i(k)$ un fechado propio o más fino que el fechado propio para ambos conjuntos.

Sea la función que aplica cada fecha de A bien en una fecha de B, bien en el conjunto vacío mediante la regla siguiente: para cada fecha en A obtenemos la primera fecha incluida en B sucesor de la fecha en A si dicho sucesor existe o el conjunto vacío si no existe.

Algo más formalmente: sea $g_i(k) \subset A$ y $g_i(k+m) \subset B$ entonces $T_{A,B}(g_i(k)) = g_i(k+m)$ si y solo si no existe $g_i(k+n) \subset B$ tal que $n < m$. De otro lado si no existe $g_i(k+m) \subset B$ para $m > 0$ entonces $T_{A,B}(g_i(k)) = \emptyset$.

Por tanto el sucesor de un conjunto en otro es el conjunto:

$$Succ(A, B, fechado) = \bigcup_{g_i(k) \subset A} T_{A,B}\,(g_i(k))$$

La anterior definición puede generalizarse permitiendo sucesores de A en B de orden mayor que 1 con modificaciones obvias.

5. Construcción de fechados

A partir de los fechados básicos y del álgebra de conjuntos temporales pueden construirse nuevas intervalaciones y desde ahí nuevos fechados recubridores. La construcción de fechados nos recubridores no requiere, por el contrario, la creación de nuevas intervalaciones. Comenzaremos por la creación de fechados recubridores derivados de cierto conjunto de fechados básicos.

5.1 Construcción de nuevos fechados recubridores

Consideremos un conjunto temporal no acotado, ni superior ni inferiormente, Ct con intervalación propia $f_i(Z)$ y fechado recubridor correspondiente $\mathcal{F}_i$. Consideremos la intersección $f_k(Z) = f_i(Z) \cap Ct$. Nótese en primer lugar que es una intervalación ya que ha sido obtenido de la intersección de una intervalación y un conjunto temporal. Puesto que Ct no está acotado tampoco lo está $f_k(Z)$. Puesto que $f_k(Z) \subset f_i(Z)$ y por tanto sabemos que ambas intervalaciones son armónicas y que $f_k(Z)$ es menos fina que $f_i(Z)$. Claramente, la función $g_k(.)$ genera el fechado recubridor $\mathcal{F}_k$.

5.2 Construcción de fechados no recubridores

Consideremos un conjunto temporal no acotado, ni superior ni inferiormente, Ct, intervalación propia $f_i(Z)$ y fechado correspondiente $\mathcal{F}_i$.

El conjunto de fechas $\mathcal{F}_i^{Ct} = \{[f_i(k), f_i(k+1)) \in \mathcal{F}_i : [f_i(k), f_i(k+1)) \subset Ct\}$ constituye un fechado no recubridor si $Ct \neq C$.

Podemos construir fechados no recubridores a partir de fechados no recubridores. Sea por ejemplo $B \neq C$ un conjunto no acotado ni superior ni inferiormente. Y sea $\mathcal{F}_i^A$ un fechado no recubridor. Entonces $\mathcal{F}_i^{A,B} = \{[f_i(k), f_i(k+1)) \in \mathcal{F}_i^A : [f_i(k), f_i(k+1)) \subset Ct\}$ es un nuevo fechado no recubridor. Es obvio sin embargo que si $\mathcal{F}_i$ es un fechado recubridor y $\mathcal{F}_i^A$ es un fechado no recubridor construido mediante la selección de fechas incluidas en A, entonces $\mathcal{F}_i^{A,B} = \mathcal{F}_i^{A \cap B}$.

5.3 Sintaxis de la creación de fechados

Sintácticamente ambos tipos de fechados pueden expresarse como

CreateDating(Fechado Fec, ConjuntoTemporal Ct, Real r), donde si r=1 genera un fechado recubridor y si r=0 entonces el fechado resultante es no recubridor. De acuerdo con la observación precedente Fec debe ser siempre recubridor, ya que siempre podemos obtener un fechado recubridor cualquiera mediante operaciones de conjuntos y un fechado recubridor.

Debe notarse que la función CreateDating exige la existencia de fechados primitivos como los fechados básicos.

6. Comentarios

Jorge: En la implementación actual del álgebra del tiempo no existe una diferencia sintáctica entre conjunto temporal y fechado. De hecho creo que esa diferencia no está arraigada entre los usuarios actuales de TOL. Creo que esa diferencia debe ser hecha explícita en el documento: *un fechado es una colección de fechas, las fechas son intervalos temporales, el conjunto temporal es la unión de todas las fechas*.

Pepe: Este es un nuevo documento sobre la representación del tiempo a partir de los comentarios de Jorge al documento Tiempopp.doc que se encuentran en el documento Tiempopp_rev02.docx. Es muy importante que discutamos a fondo este documento. He excluido todo lo que no es tiempo, aunque lógicamente debemos añadirlo para tener la extensión a álgebra de series, álgebra de polinomios, álgebra de matrices polinomiales, definición de modelo, etc.

Apéndices

A. Referencias

B. Historial del documento

15/03/2011	Correcciones iniciales en nomenclatura, se hace referencia a Z como conjunto de los enteros, se añade la propiedad de no acotada a la función intervaladora, conjunto primario en lugar de primitivo, se añaden comentarios al texto para facilitar la revisión de cambios dudos.

21/05/2011	Se añade una sección “Comentarios” para dejar comentarios varios. Así ganamos en localidad del contenido.